



JOURNAL OF IMAGE AND GRAPHICS

主办: 中国科学院遥感与数字地球研究所
中国图象图形学学会
北京应用物理与计算数学研究所

中国图象图形学报

2014
12
VOL.19

ISSN1006-8961
CN11-3758/TB



图像色彩和谐变化 P1766



第19卷第12期（总第224期）

2014年12月16日

中国精品科技期刊
中国国际影响力优秀学术期刊
中国科技核心期刊

版权声明

凡向《中国图象图形学报》投稿，均视为同意在本刊网站及CNKI等全文数据库出版，所刊载论文已获得著作权人的授权。本刊所有图片均为非商业目的使用，所有内容，未经许可，不得转载或以其他方式使用。

Copyright

All rights reserved by Journal of Image and Graphics, Institute of Remote Sensing and Digital Earth, CAS. The content (including but not limited text, photo, etc) published in this journal is for non-commercial use.

主管单位 中国科学院

主办单位 中国科学院遥感与数字地球研究所
中国图象图形学学会
北京应用物理与计算数学研究所

主 编 李小文

编辑出版《中国图象图形学报》编辑出版委员会

邮政信箱 北京9718信箱

邮 编 100101

电子信箱 jig@irsa.ac.cn

电 话 010-64807995

网 址 www.cjig.cn

广告经营许可证 京朝工商广字第0361号

总 发 行 北京报刊发行局

订 购 全国各地邮局

海外发行 中国国际图书贸易集团有限公司

（邮政信箱：北京399信箱 邮编：100048）

印刷装订 北京科信印刷有限公司

Journal of Image and Graphics

Title inscription: Song Jian

Monthly, Started in 1996

Superintended by Chinese Academy of Sciences

Sponsored by Institute of Remote Sensing and Digital Earth, CAS
China Society of Image and Graphics

Institute of Applied Physics and Computational Mathematics

Editor-in-Chief LI Xiaowen

Editor, Publisher Editorial and Publishing Board of Journal of
Image and Graphics

P.O.Box 9718, Beijing, P.R.China

Zip code 100101

E-mail jig@irsa.ac.cn

Telephone 010-64807995

Website www.cjig.cn

Distributed by Beijing Bureau for Distribution of Newspapers and Journals

Domestic All Local Post Offices in China

Overseas China International Book Trading Corporation
(P.O.Box 399, Beijing 100048, P.R.China))

Printed by Beijing Kexin Printing Co., Ltd.

CN 11-3758/TB

ISSN 1006-8961

CODEN ZTTXFZ

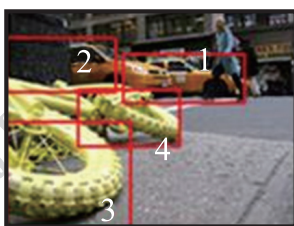
国外发行代号 M1406

国内邮发代号 82-831

国内定价 50.00元



改进鱼眼变换技术的图像适应(第1743页)



面向部件遮挡补偿的车辆检测模型(第1802页)



基于暗原色及入射光假设的单幅图像去雾(第1812页)

综述

视频摘要技术综述

王娟, 蒋兴浩, 孙铨锋 1685

局部二进制模式方法综述

刘丽, 谢毓湘, 魏迎梅, 老松杨 1696

图像处理和编码

2维全相位内插核的设计与实现

苏飞, 孙杰, 秦娟, 段宇翔 1721

改进的正则化模型在图像恢复中的应用

李旭超, 宋博 1730

改进鱼眼变换技术的图像适应

张丽霞, 区兆明, 宋鸿陟 1743

去除乘性噪声的分数阶变分模型及算法

田丹, 薛定宇, 陈大力 1751

丢包环境中H.264视频编码的快速模式判决

兰梦, 张远, 魏雨农 1759

图像分析和识别

偏度和峰度的图像色彩和谐变化

马云芳, 宋明黎, 卜佳俊 1766

结合稀疏表示和概率潜在语义的图像模糊度评价

张涛, 王新年, 梁德群 1775

Log-Gabor小波和分数阶多项式KPCA的火焰图像状态识别

宋昱, 吴一全 1785

加权局部二值模式的人脸特征提取

张洁玉, 武小川 1794

面向部件遮挡补偿的车辆检测模型

陈远, 谢昭, 吴克伟 1802

基于暗原色及入射光假设的单幅图像去雾

於敏杰, 张浩峰 1812

空间可变有限混合模型

申小虎, 吕导中, 万荣春 1820

遥感图像处理

高分辨率极化SAR图像水平集分割

邹鹏飞, 李震, 田帮森 1829

混合本征模型的多视SAR影像海冰密度检测

汪霄箭, 李玉, 赵泉华, 何晓军 1836

总目次

CONTENTS

JOURNAL OF IMAGE AND GRAPHICS



Improved fisheye transformation for image retargeting (P1743)



Part-oriented occlusion compensate model for vehicle detection(P1802)



Single-image dehazing based on dark channel and incident light assumption(P1812)

Review

Review of video abstraction

Wang Juan, Jiang Xinghao, Sun Tanfeng 1685

Survey of Local Binary Pattern method

Liu Li, Xie Yuxiang, Wei Yingmei, Lao Songyang 1696

Image Processing and Coding

Design and implementation of 2D all-phase interpolation kernel

Su Fei, Sun Jie, Qin Juan, Duan Yuxiang 1721

Applying the improved regularization model to image restoration

Li Xuchao, Song Bo 1730

Improved fisheye transformation for image retargeting

Zhang Lixia, Ou Zhaoming, Song Hongzhi 1743

Fractional-order variation model and algorithm for multiplicative noise removal

Tian Dan, Xue Dingyu, Chen Dali 1751

Fast-mode decision for H.264 video coding in a packet-loss environment

Lan Meng, Zhang Yuan, Wei Yunong 1759

Image Analysis and Recognition

Image color harmonization algorithm using skewness and kurtosis

Ma Yunfang, Song Mingli, Bu Jiajun 1766

Image blur evaluation based on sparse representation and probabilistic latent semantic analysis

Zhang Tao, Wang Xinnian, Liang Dequn 1775

State identification of boiler combustion flame images via Log-Gabor wavelet and kernel principal component analysis with fractional power polynomial models

Song Yu, Wu Yiquan 1785

Feature extraction of faces based on a weighted local binary pattern

Zhang Jieyu, Wu Xiaochuan 1794

Part-oriented occlusion compensate model for vehicle detection

Chen Yuan, Xie Zhao, Wu Kewei 1802

Single-image dehazing based on dark channel and incident light assumption

Yu Minjie, Zhang Haofeng 1812

Spatially variant finite mixture model

Shen Xiaohu, Lyu Daozhong, Wan Rongchun 1820

Remote Sensing Image Processing

High-resolution PolSAR image level set segmentation

Zou Pengfei, Li Zhen, Tian Bangsen 1829

Intrinsic mixture model-based measurement of sea ice density from a multi-look SAR image

Wang Xiaojian, Li Yu, Zhao Quanhua, He Xiaojun 1836

中图法分类号: TP751.1 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2014)12-1751-08

论文引用格式: Tian D, Xue D Y, Chen D L. Fractional-order variation model and algorithm for multiplicative noise removal[J]. Journal of Image and Graphics, 2014, 19(12): 1751-1758. [田丹, 薛定宇, 陈大力. 去除乘性噪声的分数阶变分模型及算法[J]. 中国图象图形学报, 2014, 19(12): 1751-1758.] [DOI:10.11834/jig.20141206]

去除乘性噪声的分数阶变分模型及算法

田丹^{1,2}, 薛定宇¹, 陈大力¹

1. 东北大学信息科学与工程学院, 沈阳 110004; 2. 沈阳大学信息工程学院, 沈阳 110044

摘要: **目的** 针对变分方法在去除图像乘性噪声时易产生“阶梯效应”的问题, 分析研究了几种经典乘性去噪变分模型的特性和相关性, 在此基础上考虑到分数阶微分的频率特性, 提出一种用于去除乘性 Gamma 噪声的分数阶凸变分模型。**方法** 提出的分数阶凸变分模型是经典 I-divergence 变分模型的分数阶扩展。基于对偶理论, 提出一种用于求解该模型的分数阶原始对偶算法。并且基于鞍点理论, 分析了确保算法收敛的参数取值范围。**结果** 实验中从频域角度分析并验证了提出的分数阶变分模型较经典的一阶变分模型能够有效缓解“阶梯效应”现象, 更好地保持图像的中频纹理和低频边缘信息。同时提出的分数阶原始对偶数值算法能有效收敛, 且收敛速度较快。**结论** 本文提出了一种去除图像乘性噪声的分数阶变分模型, 该模型可采用一种基于预解式的原始对偶算法求解。实验结果表明, 提出的模型能有效改善图像的视觉效果, 采用的数值算法能有效快速收敛。

关键词: 乘性噪声; 变分法; 分数阶微分; 原始对偶算法; 鞍点模型

Fractional-order variation model and algorithm for multiplicative noise removal

Tian Dan^{1,2}, Xue Dingyu¹, Chen Dali¹

1. School of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang 110004, China;

2. School of Information Engineering, Shenyang University, Shenyang 110044, China

Abstract: **Objective** Considering that the variation methods for image multiplicative noise removal exhibit the staircase effect problem, we analyze the characteristic and correlation of several classical multiplicative denoising variation models. With the frequency characteristic of the fractional differential considered, a fractional-order convex variation model for multiplicative Gamma noise removal is proposed. **Method** Our fractional-order convex variation model is the fractional-order generalization of the classical I-divergence variation model. Based on duality theory, a fractional-order primal-dual algorithm to solve the model is proposed. The range of the parameter is given according to saddle-point theory to guarantee algorithm convergence. **Result** In terms of frequency domain aspects, the experiments verify that the proposed fractional-order variation model is effective in relaxing the staircase effect and preserving medium-frequency texture information in a cardiac ultrasound image, as well as high-frequency building edges information in the “Cameraman” image compared with the classical first-order variation model. The proposed fractional-order primal-dual algorithm can also effectively converge and exhibits a fast convergence speed. **Conclusion** To produce denoised images with minimal loss of image details, this study proposes a fractional-order variation model for image multiplicative noise removal. Classical variation numerical algorithms need to compute the derivative of a non-differentiable function (i. e., the fractional-order regulation term), so we refer to a

收稿日期: 2014-05-21; 修回日期: 2014-08-21

基金项目: 国家自然科学基金项目(61201378, 61174145); 辽宁省教育厅科学研究一般项目(L2013448)

第一作者简介: 田丹(1980—), 女, 讲师, 东北大学系统仿真与应用专业博士研究生, 主要研究方向为数字图像处理、分数阶微分理论的应用。E-mail: www.sltld2008@163.com

primal-dual algorithm based on a resolvent for an alternative solution. Experiment results indicate that the proposed model can effectively improve the image visual effect, and the adoptive numerical algorithm demonstrates a fast convergence speed.

Key words: multiplicative noise; variation method; fractional-order differential; primal-dual algorithm; saddle-point model

0 引言

在图像去噪问题中,目前大多数研究都是针对加性噪声的。而在实际中,乘性噪声普遍存在于合成孔径雷达图像、医学图像、显微图像和激光图像中。因此对图像乘性噪声去除问题的研究具有广泛的应用价值。

一般地,乘性噪声可用下面的数学模型表示^[1]

$$f = u\eta \quad (1)$$

式中, f 表示观测图像, u 表示原始图像, η 表示噪声。本文研究的噪声类型是均值为 1 的 Gamma 分布噪声,其概率密度函数为

$$P(\eta) = \begin{cases} \frac{L^L}{\Gamma(L)} \eta^{L-1} e^{-L\eta} & \eta \geq 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (2)$$

式中, L 表示同场景独立成像次数, $\Gamma(\cdot)$ 表示 Gamma 函数。

在乘性噪声去除方法中,变分方法凭借其严格的数学理论,成为目前的研究热点之一。文献[2]中, Rudin、Lions 和 Osher 基于去除加性噪声的变分方法,提出了一种去除乘性高斯噪声的 RLO 变分模型。文献[3]中, Aubert 和 Aujol 基于最大后验概率估计,提出了一种去除乘性 Gamma 噪声的 AA 变分模型,并采用梯度下降算法求解模型。

考虑到 AA 模型的非凸性导致去噪结果依赖于初始值选取的问题,近年来兴起了关于凸变分乘性去噪模型的研究。例如, SO 模型^[4]、I-divergence 模型^[5]等。

上述变分去噪模型均通过引入能量函数,将图像去噪问题转化为泛函求极值问题。模型均建立在有界变差(BV)空间,而 BV 空间的函数具有分段平滑特性,所以稳态解中均存在明显的“阶梯效应”,即遗失了一些细节信息,出现分段平滑现象。为了解决这一问题,借助分数阶微分能考虑更多邻域像素信息的特性,将分数阶微分引入到一种凸变分去噪模型中,提出了一种分数阶 I-divergence 模型,以解决该新衍生的问题。

目前有多种求解变分问题的数值算法,但均在

不同程度上具有运行速度慢或计算复杂度高的问题。本文研究发现,基于对偶理论对提出的分数阶 I-divergence 模型作等价变换可得到一种分数阶 I-divergence 原始对偶模型,该模型在结构上与具有鞍点结构的优化模型形式相近,可建立对应关系,故可采用一种求解鞍点问题的更为灵活且收敛速度较快的原始对偶算法^[6]求解。针对算法中定义的参数,结合分数阶微分的性质,文中给出了其取值范围,以保证算法的收敛性。实验结果表明,提出的分数阶模型能有效缓解“阶梯效应”,保留更多的图像细节特征。同时采用的原始对偶算法与一些现有的经典变分算法相比,收敛速度更快。

1 几种变分去噪模型及其相关性分析

1.1 SO 模型

Shi 和 Osher 利用对数变换 $w = \lg u$, 将乘性变分去噪问题转换为加性变分去噪问题,提出了一种指数变分模型

$$\begin{cases} \hat{w} = \arg \min_{w \in BV} \left\{ \int_{\Omega} (f e^{-w} + w) dx + \lambda \int_{\Omega} |\nabla w| dx \right\} \\ \hat{u} = e^{\hat{w}} \end{cases} \quad (3)$$

式中, f 表示观测图像, u 表示去噪后图像, λ 表示正则化参数, w 为中间变量。考虑到对数函数的单调递增特性,该模型将梯度算子直接作用于对数变换图像,确保了作用后不改变图像边缘的位置。

1.2 I-divergence 模型

I-divergence 是一种广义 Kullback-Leibler (KL) 距离。从统计学角度看,可以用来度量两个概率分布的差异性,具体定义为

$$I(f, u) = \int_{\Omega} \left(f \lg \frac{f}{u} - f + u \right) dx \quad (4)$$

Steidl 等人利用 I-divergence 作为数据保真项,忽略其中的常数项后,再结合全变分正则项,提出了一种乘性噪声去除模型,命名为 I-divergence 模型

$$\hat{u} = \arg \min_{u \in BV} \left\{ \int_{\Omega} (u - f \lg u) dx + \lambda \int_{\Omega} |\nabla u| dx \right\} \quad (5)$$

1.3 Weberized 模型

Xiao 等人^[7]从视觉生理学角度出发,根据 Weber 定律构造变分正则项,再结合乘性 Gamma 噪声分布的最大后验统计构造数据保真项,提出了一种 Weberized 变分正则化模型

$$\hat{u} = \arg \min_{u \in BV} \left\{ \int_{\Omega} \left(\frac{f}{u} + \lg u \right) dx + \lambda \int_{\Omega} \frac{|\nabla u|}{u} dx \right\} \quad (6)$$

该模型通过引入 Weberized 变分正则项,不仅强调了图像的正则性,同时能更好地保持图像的对比度特性。

1.4 模型的相关性分析

下面基于变分理论,分别推导上述 3 种变分模型的欧拉方程,从而分析模型解间的联系。

SO 模型的欧拉方程为

$$1 - fe^{-\hat{u}} - \lambda \operatorname{div} \frac{\nabla \hat{u}}{|\nabla \hat{u}|} = 0 \quad (7)$$

I-divergence 模型的欧拉方程为

$$1 - \frac{f}{\hat{u}} - \lambda \operatorname{div} \frac{\nabla \hat{u}}{|\nabla \hat{u}|} = 0 \quad (8)$$

Weberized 模型的欧拉方程为

$$\begin{cases} 1 - \frac{f}{\hat{u}} - \lambda \operatorname{div} \frac{\nabla \hat{u}}{|\nabla \hat{u}|} = 0 \\ \left. \frac{d\hat{u}}{dn} \right|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad (9)$$

式中, n 是边界 $\partial\Omega$ 的单位外法向量,且 $n = \nabla u / |\nabla u|$ 。

不难看出,因 SO 模型定义中设定 $\hat{u} = e^{\hat{u}}$,且 $\frac{\nabla \hat{u}}{|\nabla \hat{u}|} = \frac{e^{\hat{u}} \nabla \hat{u}}{e^{\hat{u}} |\nabla \hat{u}|} = \frac{\nabla \hat{u}}{|\nabla \hat{u}|}$,所以 SO 模型与 I-divergence 模型解一致。其中,I-divergence 模型的优势在于不需要对优化结果再做非线性指数运算处理。再有,如果给 I-divergence 模型加边界条件 $d\hat{u}/dn|_{\partial\Omega} = 0$,则与 Weberized 模型解一致。Weberized 模型的优势在于可以提高图像的对比度保持能力,但因其具有非凸特性,所以模型解依赖于初始值的选取。

通过上述分析可以得出 3 种模型的解具有相关性,但各模型求解的数值实现过程仍要依赖于模型的自身特性。

2 分数阶 I-divergence 模型的提出

分数阶微分已经成功应用于图像加性噪声的去

除^[8-10],有效缓解了“阶梯效应”现象。目前存在多种函数的分数阶微分定义,本文利用其中的 Grünwald-Letnikov (G-L) 定义^[11]构造分数阶梯度算子。对于有限维向量空间 X 中的任意 2 维图像 u ,假定图像大小为 $M \times N$,则其分数阶微分离散形式定义为

$$(\nabla^{\alpha} u)_{i,j} = ((\Delta_1^{\alpha} u)_{i,j}, (\Delta_2^{\alpha} u)_{i,j}) \quad (10)$$

$$i = 1, 2, \dots, M, j = 1, 2, \dots, N$$

式中

$$\begin{cases} (\Delta_1^{\alpha} u)_{i,j} = \sum_{k=0}^{K-1} (-1)^k C_k^{\alpha} u_{i-k,j} \\ (\Delta_2^{\alpha} u)_{i,j} = \sum_{k=0}^{K-1} (-1)^k C_k^{\alpha} u_{i,j-k} \end{cases} \quad (11)$$

$K \geq 3$ 为整常数, $C_k^{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha-k+1)}$, $\Gamma(\cdot)$

表示 Gamma 函数。

前面回顾的变分去噪模型均建立在 BV 空间,而 BV 空间的函数具有分段平滑特性,所以稳态解中均存在明显的“阶梯效应”现象。本文通过引入分数阶微分解决该衍生问题。综合考虑 SO 模型需要对优化结果作非线性指数运算处理,而 Weberized 模型解依赖于初始值的设定。本文选取 I-divergence 模型做分数阶扩展,提出一种分数阶 I-divergence 模型

$$\hat{u} = \arg \min_{u \in BV_{\alpha}} \left\{ \int_{\Omega} (u - f) \lg u \, dx + \lambda \int_{\Omega} |\nabla^{\alpha} u| \, dx \right\} \quad (12)$$

式中

$$\begin{cases} \int_{\Omega} |\nabla^{\alpha} u| \, dx = \sum_{\substack{1 \leq i \leq M \\ 1 \leq j \leq N}} |(\nabla^{\alpha} u)_{i,j}| \\ |(\nabla^{\alpha} u)_{i,j}| = \sqrt{((\Delta_1^{\alpha} u)_{i,j})^2 + ((\Delta_2^{\alpha} u)_{i,j})^2} \end{cases} \quad (13)$$

由定义可知,分数阶微分是一个全局算子,较传统的一阶微分算子能考虑更多的图像邻域信息,保护更多的图像细节特征,缓解“阶梯效应”现象。理论上讲,分数阶微分算子可由无限项组成,但在图像处理应用中,一般取 $K = \min\{M, N\}$ 。

针对模型(12)的求解,如采用经典的欧拉方程方法,需要计算一个不可微函数(分数阶正则项)的导数。考虑到这一问题,采用了一种原始对偶模型替代求解。首先给出分数阶正则项的对偶函数。

定理 1 在有限维向量空间 Y 中,对于任意的 2 维变量 $p = (p^1, p^2) \in Y$, $|p_{i,j}| = \sqrt{(p_{i,j}^1)^2 + (p_{i,j}^2)^2} \leq 1$,

满足

$$\int_{\Omega} |\nabla^{\alpha} u| dx = \sup_{p \in Y} \langle \nabla^{\alpha} u, p \rangle \quad (14)$$

证明:因为

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla^{\alpha} u| dx &= \sum_{i,j} |(\nabla^{\alpha} u)_{i,j}| \geq \\ \sum_{i,j} |(\nabla^{\alpha} u)_{i,j}| \cdot |p_{i,j}| &\geq \sum_{i,j} (\nabla^{\alpha} u)_{i,j} \cdot p_{i,j} \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} (\nabla^{\alpha} u)_{i,j} \cdot p_{i,j} &= \\ \sum_{i,j} [(\Delta_1^{\alpha} u)_{i,j} \cdot p_{i,j}^1 + (\Delta_2^{\alpha} u)_{i,j} \cdot p_{i,j}^2] &= \langle \nabla^{\alpha} u, p \rangle \end{aligned}$$

所以 $\int_{\Omega} |\nabla^{\alpha} u| dx = \sup_{p \in Y} \langle \nabla^{\alpha} u, p \rangle$, 定理得证。

令 $F(u) = \int_{\Omega} |\nabla^{\alpha} u| dx$, 则其对偶函数 $F_p^*(p)$

满足如下特性

$$F_p^*(p) = \begin{cases} 0 & p \in P \\ +\infty & p \notin P \end{cases} \quad (15)$$

式中, $P = \{p \in Y: \|p\|_{\infty} = \max_{i,j} |p_{i,j}| \leq 1\}$ 表示对偶空间。

依据上述分析,提出一种分数阶 I-divergence 原始对偶模型,即分数阶 I-divergence 模型的原始对偶描述,表示为

$$\min_{u \in X} \max_{p \in Y} \langle \nabla^{\alpha} u, p \rangle + \lambda(u - \text{flg } u) - F_p^*(p) \quad (16)$$

而分数阶 I-divergence 模型的对偶模型可描述为

$$\begin{aligned} \max_{p \in Y} \left\langle \frac{f\lambda}{\lambda + \nabla^{\alpha} * p}, \nabla^{\alpha} * p \right\rangle + \frac{\lambda^2 f}{\lambda + \nabla^{\alpha} * p} - \\ f\lambda \text{lg} \frac{f\lambda}{\lambda + \nabla^{\alpha} * p} - F_p^*(p) \end{aligned} \quad (17)$$

3 数值算法

研究发现,提出的分数阶 I-divergence 原始对偶模型与鞍点优化模型具有结构相似性。具有鞍点结构的优化模型可表示为^[6]

$$\min_{x \in X} \max_{y \in Y} \langle Ax, y \rangle + G(x) - F^*(y) \quad (18)$$

式中, X, Y 表示有限维实向量空间, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示内积, A 表示任意线性算子, G 和 F 表示任意函数, F^* 表示 F 的拓扑对偶。

将优化模型中变量 x 看成原始变量, 变量 y 看成对偶变量, 则可将鞍点问题看成是如下原始问题

和对偶问题的原始对偶描述。其中, 原始问题可表示为

$$\min_{x \in X} F(Ax) + G(x) \quad (19)$$

对偶问题可表示为

$$\max_{y \in Y} - (G^*(-A^*y) + F^*(y)) \quad (20)$$

不难看出, 提出的分数阶 I-divergence 原始对偶模型可与鞍点优化模型建立对应关系, 即 $A = \nabla^{\alpha}$, $G(u) = \lambda(u - \text{flg } u)$, $F^*(p) = F_p^*(p)$ 。

针对鞍点优化模型, 文献[6]中提出了一种基于预解式的原始对偶数值计算方法。令原始变量 x 固定, 对对偶变量 y 求导, 可得到变量 y 的预解式

$$y = (I + \nabla F^*)^{-1}(y + Ax) \quad (21)$$

同理, 令对偶变量 y 固定, 对原始变量 x 求导, 可得到变量 x 的预解式

$$x = (I + \nabla G)^{-1}(x - Ay) \quad (22)$$

式中, ∇F^* 和 ∇G 分别对应函数 F^* 和 G 的梯度。定义参数 H , 满足特性

$$H = |A| = \max\{|Ax|: x \in X, |x| \leq 1\} \quad (23)$$

当函数 F^* 和 G 中至少有一个为凸函数时, 基于预解式的原始对偶算法可描述如下:

1) 初始化。给定初始步长 $\tau_0, \sigma_0 > 0$, 且满足 $\tau_0 \sigma_0 H^2 \leq 1$ 。令 $(x^0, y^0) \in X \times Y, \bar{x}^0 = x^0$ 。

2) 计算

$$\begin{cases} y^{n+1} = (I + \sigma_n \nabla F^*)^{-1}(y^n + \sigma_n A \bar{x}^n) \\ x^{n+1} = (I + \tau_n \nabla G)^{-1}(x^n - \tau_n A^* y^{n+1}) \\ \theta_n = 1 / \sqrt{1 + 2\gamma \tau_n}, \tau_{n+1} = \theta_n \tau_n, \sigma_{n+1} = \sigma_n / \theta_n \\ \bar{x}^{n+1} = x^{n+1} + \theta_n (x^{n+1} - x^n) \end{cases} \quad (24)$$

3) 计算原始对偶间隔, 定义

$$\begin{aligned} \zeta(x, y) &= \max_{y' \in Y} \langle y', Ax \rangle - F^*(y') + G(x) - \\ &\min_{x' \in X} \langle y, Ax' \rangle - F^*(y) + G(x') \end{aligned} \quad (25)$$

当该指标满足给定的迭代终止条件时, 迭代终止; 否则, 令 $n = n + 1$, 转步骤 2)。

不难看出, 原始对偶间隔是对偶问题和原始问题的目标函数差值。该差值在鞍点处可达到最小^[6], 故以该指标设定阈值, 可保证算法收敛到最优解。

考虑到提出的分数阶 I-divergence 原始对偶模型中, ∇^{α} 为线性算子, 数据保真项 $G(u) = \lambda(u - \text{flg } u)$ 为凸函数, 满足算法的前提条件, 故可采用上述数值

算法实现图像乘性噪声去除的优化过程。该算法实现了自适应变步长迭代, 可有效提高寻优效率, 弥补了一些传统数值算法对步长要求过高的缺陷。

在数值算法实现中, 需要确定预解算子 $(I + \sigma \nabla F^*)^{-1}$, $(I + \tau \nabla G)^{-1}$ 和线性算子 A 。因为 $F^*(p) = F_p^*(p)$, $G(u) = \lambda(u - \text{flg } u)$, 所以

$$p = (I + \sigma \nabla F^*)^{-1}(\bar{p}) \Leftrightarrow p_{i,j} = \frac{\bar{p}_{i,j}}{\max(1, |\bar{p}_{i,j}|)} \quad (26)$$

$$u = (I + \tau \nabla G)^{-1}(\bar{u}) \Leftrightarrow u_{i,j} = \frac{-(\tau\lambda - \bar{u}) + \sqrt{(\tau\lambda - \bar{u})^2 + 4\tau\lambda f_{i,j}}}{2} \quad (27)$$

式中, $\bar{p} = p + \sigma A \bar{u}$, $\bar{u} = u - \tau A^* p$, $A = \nabla^\alpha$ 。

下面提出一种可替代求解分数阶 I-divergence 模型的分阶 I-divergence 原始对偶算法, 流程如下:

1) 初始化。给定初始步长 $\tau_0, \sigma_0 > 0$, 且满足 $\tau_0 \sigma_0 H^2 \leq 1$ 。令 $(u^0, p^0) \in X \times Y$, $\bar{u}^0 = u^0$ 。

2) 计算

$$\begin{cases} p^{n+1} = \frac{p^n + \sigma_n \nabla^\alpha \bar{u}^n}{\max(1, |p^n + \sigma_n \nabla^\alpha \bar{u}^n|)} \\ u^{n+1} = \frac{-(\tau\lambda - u^n + \tau \nabla^{\alpha*} p^{n+1}) + \sqrt{(\tau\lambda - u^n + \tau \nabla^{\alpha*} p^{n+1})^2 + 4\tau\lambda f}}{2} \\ \theta_n = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\gamma\tau_n}}, \tau_{n+1} = \theta_n \tau_n, \sigma_{n+1} = \sigma_n / \theta_n \\ \bar{u}^{n+1} = u^{n+1} + \theta_n (u^{n+1} - u^n) \end{cases} \quad (28)$$

3) 计算原始对偶间隔, 定义

$$\zeta(u, p) = \max_{p' \in Y} \langle p', Au \rangle - F^*(p') + G(u) - \min_{u' \in X} \langle p, Au' \rangle - F^*(p) + G(u') \quad (29)$$

当该指标满足给定的迭代终止条件时, 迭代终止; 否则, 令 $n = n + 1$, 转步骤 2)。

文献[6]中提出并证明了基于预解式的原始对偶算法的收敛性, 但需满足参数 H 的定义, 故这里需求取参数 H 的取值范围。首先给出分数阶散度的离散形式定义

$$\text{div}^\alpha p = (\text{div}^\alpha p)_{i,j} \quad (30)$$

$$i = 1, 2, \dots, M, \quad j = 1, 2, \dots, N$$

式中

$$(\text{div}^\alpha p)_{i,j} = (-1)^\alpha \sum_{k=0}^{K-1} (-1)^k C_k^\alpha p_{i+k,j}^1 +$$

$$(-1)^\alpha \sum_{k=0}^{K-1} (-1)^k C_k^\alpha p_{i,j+k}^2 \quad (31)$$

令 $w_i = (-1)^i C_i^\alpha$, 因为

$$\begin{aligned} |\nabla^\alpha|^2 &= |(-1)^\alpha \text{div}^\alpha p|^2 = \\ &= \sum_{i,j} (w_0 p_{i,j}^1 + w_1 p_{i+1,j}^1 + \dots + w_{K-1} p_{i+K-1,j}^1 + \\ &\quad w_0 p_{i,j}^2 + w_1 p_{i,j+1}^2 + \dots + w_{K-1} p_{i,j+K-1}^2)^2 \leq \\ &= 2K \times \sum_{i,j} (w_0 p_{i,j}^1)^2 + (w_0 p_{i,j}^2)^2 + (w_1 p_{i+1,j}^1)^2 + \\ &\quad (w_1 p_{i,j+1}^2)^2 + \dots + (w_{K-1} p_{i+K-1,j}^1)^2 + (w_{K-1} p_{i,j+K-1}^2)^2 \leq \\ &= 2K \times (w_0^2 + w_1^2 + \dots + w_{K-1}^2) |p|^2 \leq \\ &= 2K \times (w_0^2 + w_1^2 + \dots + w_{K-1}^2) \end{aligned} \quad (32)$$

所以

$$H = |\nabla^\alpha| = |(-1)^\alpha \text{div}^\alpha| \leq \sqrt{2K \sum_{i=0}^{K-1} w_i^2} \quad (33)$$

4 数值实验与分析

本文提出的分数阶 I-divergence 原始对偶算法, 需要计算线性算子 ∇^α 的伴随算子 $\nabla^{\alpha*}$ 。如将图像视为向量, 根据线性代数理论, 可得出 $\nabla^{\alpha*}$ 等于 ∇^α 的转置。为了简化算法实现, 实验中首先对图像作向量化处理。即通过逐行扫描的方式, 将图像矩阵转换为列向量, 这样对于 $M \times N$ 的图像, 图像矩阵的位置 (i, j) 对应列向量中的位置 $(i-1) \times N + j$ 。

选取“Cameraman”和“Heart”图像作为测试图像, 图像大小分别为 256×256 和 156×156 , 如图1所示。实验中算法参数设定如下: 初始步长 $\sigma_0 = \tau_0 = 1/H$, 为了保证数据项 $G(u)$ 的一致凸特性, 应满足 $\gamma = c \times \lambda$, 其中, $c \in (0, 1]$, 这里令 $c = 0.7$ 。下面将分析比较本文提出的模型和算法的有效性和优越性。



(a) Cameraman

(b) Heart

图1 测试图像

Fig. 1 Test images

4.1 算法的性能分析和比较

选取 Cameraman 图像作为测试图像,加入均值为 1, L 分别为 10, 25 和 33 的 Gamma 乘性噪声。为了验证本文算法在变分数值算法中的快速性优势,

这里将其与一些经典算法进行比较,包括梯度下降算法^[3],增广拉格朗日算法^[12]和 Bregman 分裂算法^[13]。表 1 给出了当 $\alpha = 1.0$, $\lambda = 8$, 解的均方根误差 $\varepsilon \leq 10^{-3}$, 10^{-4} 时几种算法迭代次数和 CPU 时间的比较。

表 1 几种变分算法迭代次数和 CPU 时间的比较

Table 1 Comparison of the number of iterations and the CPU times on several variation algorithms

		文献[3]		文献[12]		文献[13]		本文算法	
		10^{-3}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-4}
$L = 10$	迭代次数	—	—	11	46	2	2	12	25
	CPU 时间/s	—	—	1.78	6.84	12.47	12.63	0.28	0.57
$L = 25$	迭代次数	631	—	11	29	2	2	14	30
	CPU 时间/s	8.12	—	1.78	4.39	12.41	12.66	0.35	0.72
$L = 33$	迭代次数	512	—	12	25	2	2	14	33
	CPU 时间/s	6.49	—	1.93	3.79	12.44	12.58	0.33	0.79

不难看出,本文采用的基于预解式的原始对偶算法在快速性上明显优于其他测试算法。同时,将该算法扩展到分数阶,用于解决图像的乘性噪声去除问题。由定义可知,与一阶局域算子相比,分数阶全局算子的实现将耗用更多的运行时间。表 2 中给出了 $\lambda = 8$, 解的均方根误差 $\varepsilon \leq 10^{-4}$, 在不同分数阶次作用下分数阶 I-divergence 原始对偶算法的迭代次数和 CPU 时间。

表 2 不同分数阶次下迭代次数和 CPU 时间的比较

Table 2 Comparison of the number of iterations and the CPU times under different fractional order

		1.2	1.4	1.6	1.8
$L = 10$	迭代次数	78	86	94	103
	CPU 时间/s	2.11	2.32	2.53	2.77
$L = 25$	迭代次数	95	102	111	120
	CPU 时间/s	2.58	2.75	3.02	3.24
$L = 33$	迭代次数	98	105	114	122
	CPU 时间/s	2.68	2.84	3.08	3.28

实验结果表明,随着分数阶次的增加,算法的收敛速度变慢,但在不同噪声强度下均能有效收敛。该算法的收敛性,还可以通过跟踪模型对应的原始问题式(12)和对偶问题式(17)的能量函数差值,即原始对偶间隔的变化情况验证。从理论上讲,原始对偶间隔等于零时,模型的解可收敛

于鞍点,即达到最优解。选取“Cameraman”图像作为测试图像,加入均值为 1, $L = 33$ 的 Gamma 乘性噪声。当 $\lambda = 8$ 时,图 2 中给出了几个典型分数阶次作用下去噪迭代过程中原始对偶间隔的变化曲线。结果表明,算法能有效快速收敛于鞍点。

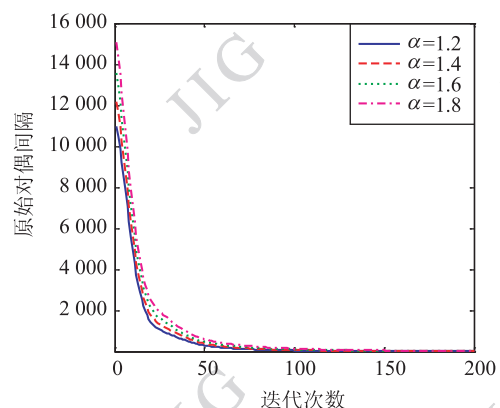


图 2 不同分数阶次下模型的收敛性比较
Fig. 2 Comparison of convergence under different fractional orders

4.2 模型的性能分析和比较

考虑到分数阶微分的频率特性,将传统的一阶 I-divergence 模型扩展到了分数阶。图 3 中给出了分数阶微分在几个典型阶次下的幅频特性响应曲线。

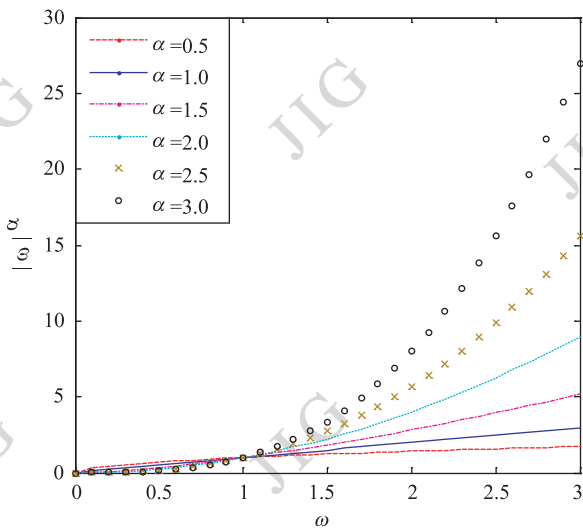


图3 幅频特性响应曲线

Fig. 3 Amplitude-frequency response

不难看出,在甚低频部分 $0 < \omega < 1$, 对应于图像的平滑区域,分数阶微分与一阶微分对图像的增强能力相似。但在中频和高频部分 $\omega > 1$, 分数阶微分对图像的增强能力明显优于一阶微分。可见,分数阶微分有利于增强图像的中频纹理和低频边缘信息。下面将测试模型的去噪性能。

首先选取含有乘性斑点噪声的临床心脏超声图像作为测试图像,分析比较不同分数阶次下模型的去噪效果,如图4所示。为了测试分数阶微分在模型中的作用,这里固定调整参数 λ , 令 $\lambda = 4$, 迭代次数 $n = 200$, $\alpha \in (0, 3)$ 。

实验结果表明,随着分数阶次 α 的增加图像的细节保护能力有效增强,但同时也残留更多的乘性噪声成分。综合考虑模型对噪声的抑制能力和对图像细节特征的保护能力,本文选取 $\alpha \in (1, 2)$ 。

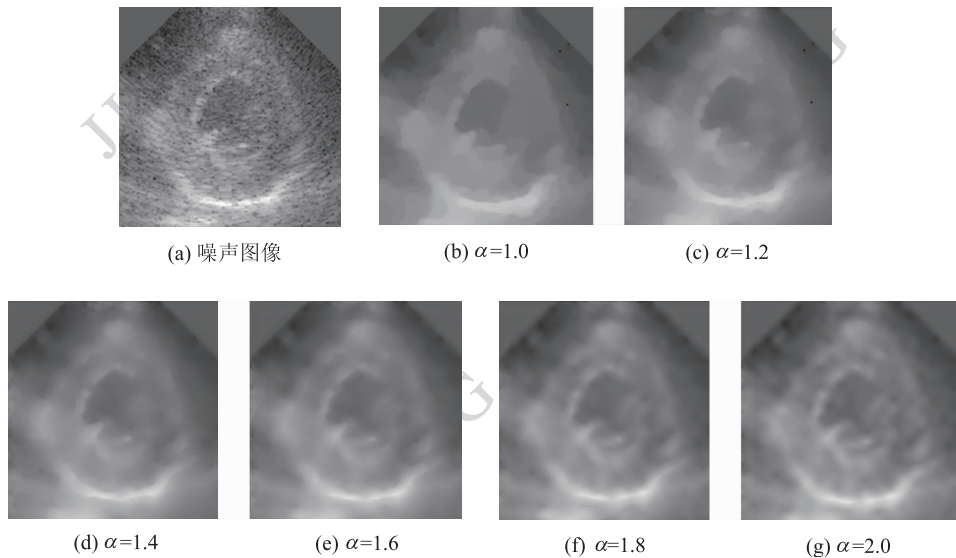


图4 不同阶次下心脏超声图像去噪效果比较

Fig. 4 Comparison of denoised results under different orders on a cardiac ultrasound image

图4中可清晰看出一阶模型作用下,有明显的“阶梯效应”,即分段平滑现象。而提出的分数阶模型能有效缓解“阶梯效应”,保留更多的纹理和边缘细节信息。但随着分数阶次的增加,也残留更多的乘性噪声成分。与二阶模型相比,能更有效地去除噪声。这一结果符合前面关于分数阶微分频率特性的分析。

选取“Cameraman”图像作为测试图像,并加入均值为1, L 为33的Gamma乘性噪声。设定实验的

迭代次数 $n = 200$, $\lambda = 2$, 比较不同分数阶次作用下的去噪效果。

图5中可清晰看出一阶模型作用下,有明显的“阶梯效应”,即分段平滑现象。而分数阶模型作用下,一些高频背景楼宇边缘信息和一些中频水波纹理信息能有效保留。但随着分数阶次的增加,也残留了更多的乘性噪声成分。与二阶模型相比,噪声去除能力更强。这一结果符合前面关于分数阶微分频率特性的分析。

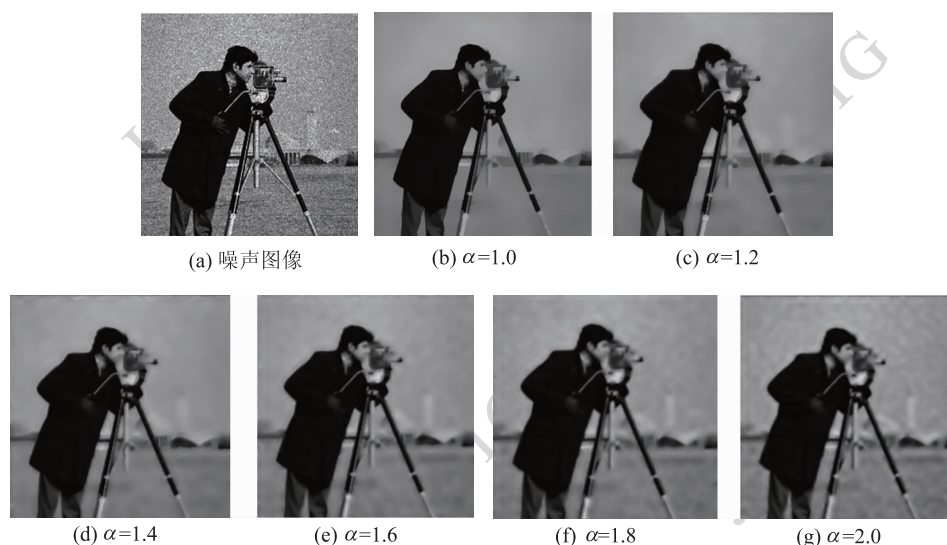


图5 不同阶次下 Cameraman 图像去噪效果比较

Fig. 5 Comparison of denoised results under different orders on Cameraman image

5 结 论

为了抑制乘性噪声的同时,保持更多的图像细节信息,有效缓解“阶梯效应”现象,将著名的一阶 I-divergence 变分模型推广到分数阶,提出了一种凸乘性噪声去除模型。基于鞍点优化理论,提出了一种求解该模型的分数阶原始对偶数值算法,并作了收敛性分析。实验结果表明,提出的分数阶模型和算法在改善图像质量和快速性上均优于现有的一些经典方法。在今后的工作中,将对分数阶变分去噪模型中调整参数的自适应选取问题进行研究。

参考文献 (References)

- [1] Dong Y, Zeng T. A convex variational model for restoring blurred images with multiplicative noise[J]. SIAM Journal on Imaging Sciences, 2013, 6(3): 1598-1625.
- [2] Rudin L, Lions P L, Osher S. Multiplicative denoising and deblurring: theory and algorithms[M]. Geometric Level Set Methods in Imaging, Vision, and Graphics. New York: Springer 2003: 103-119.
- [3] Aubert G, Aujol J F. A variational approach to removing multiplicative noise[J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 2008, 68(4): 925-946.
- [4] Shi J, Osher S. A nonlinear inverse scale space method for a convex multiplicative noise model[J]. SIAM Journal on Imaging Sciences, 2008, 1(3): 294-321.
- [5] Steidl G, Teuber T. Removing multiplicative noise by Douglas-Rachford splitting methods[J]. Journal of Mathematical Imaging and Vision, 2010, 36(2): 168-184.
- [6] Chambolle A, Pock T. A first-order primal-dual algorithm for convex problems with applications to imaging[J]. Journal of Mathematical Imaging and Vision, 2011, 40(1): 120-145.
- [7] Xiao L, Huang L L, Wei Z H. A weberized total variation regularization-based image multiplicative noise removal algorithm[J]. EURASIP Journal on Advances in Signal Processing, 2010, 2: 1-15.
- [8] Zhang J, Wei Z, Xiao L. Adaptive fractional-order multi-scale method for image denoising[J]. Journal of Mathematical Imaging and Vision, 2012, 43(1): 39-49.
- [9] Chen D, Sun S, Zhang C, et al. Fractional-order TV-L2 model for image denoising[J]. Central European Journal of Physics, 2013, 11(10): 1414-1422.
- [10] Bai J, Feng X C. Fractional-order anisotropic diffusion for image denoising[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2007, 16(10): 2492-2502.
- [11] Odubny I. Fractional Differential Equations[M]. New York: Academic Press, 1999.
- [12] Bioucas-Dias J M, Figueiredo M A T. Multiplicative noise removal using variable splitting and constrained optimization[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2010, 19(7): 1720-1730.
- [13] Goldstein T, Osher S. The split Bregman method for L1-regularized problems[J]. SIAM Journal on Imaging Sciences, 2009, 2(2): 323-343.